



Résolution des équations elliptiques par la méthode du shift

Mohamed Ben Alaya

CERMA-ENPC, URA-CNRS 1502, E.N.P.C La courtine, 93167 Noisy le Grand Cedex, France

Abstract

The pointwise Birkhoff theorem applied with the shift operator on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ yields a new practical method to compute expectation of functionals in $L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Compared to the classic Monte carlo method the shift turns out to be an efficient process in many aspects, especially when taking account its implementation on computers. We recall that the rate of convergence of this method is given by theorems like the law of the iterated logarithm and a central limit theorem.

We try to apply this process to the numerical resolution of elliptiques equations. One goal of this paper is to see, with ordinary example, how we can use the shift in this case. Indeed, three techniques will be discussed and efficiency will be tested by simulation, especially in comparison with the classic Monte Carlo method. Theoretical justifications will be shown.

Dans la suite on notera par $\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}$ l'espace produit de \mathbb{R} , $\lambda = \mu^{\otimes \mathbb{N}}$ la mesure produit définie sur $\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}$ où μ est une probabilité sur \mathbb{R} , et θ la fonction de décalage, appelée aussi opérateur de shift, définie sur $\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}$ par

$$\theta(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots) = (Y_2, Y_3, \dots, Y_{k+1}, \dots).$$

Il est clair que $\theta(\lambda) = \lambda$, où $\theta(\lambda)$ est la mesure image. On vérifie (cf. Krengel [8]) que le système dynamique $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}), \lambda, \theta)$ est ergodique. Par conséquent, d'après le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff on a pour toute fonctionnelle F λ -intégrable sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F \circ \theta^n \longrightarrow \mathbb{E}F \quad \lambda\text{-p.s.}, \quad (1)$$

Pour l'essentiel, la méthode du décalage est la mise en œuvre informatique de cette équation. L'espérance mathématique est simulée sur des trajectoires dépendantes; les performances de ce procédé proviennent d'une "boîte de stockage" qui évite de recommencer inutilement certains calculs partiels en passant d'une trajectoire à une autre et qui permet, donc, une vitesse de convergence *informatique* plus grande que la méthode de Monte Carlo.

Pour des classes de fonctions couramment employées en simulation, une estimation de la vitesse de convergence, telle que la loi du logarithme itéré et le théorème de la limite centrale, a été donnée (voir [1,3,2]). En particulier, j’ai étudié l’erreur théorique des fonctionnelles F de carré intégrable et mesurables par rapport à la tribu \mathcal{F}_T des événements antérieurs à un $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ -temps d’arrêt T , où $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. La conclusion essentielle est que si T admet un moment d’ordre strictement supérieur à 2 alors la vitesse de convergence asymptotique (mathématique) est du même ordre de grandeur, $O(1/\sqrt{n})$, que la loi des grands nombres. Cette vitesse de convergence est contrôlée par un paramètre σ^2 , représentant la somme de la variance et des corrélations entre les trajectoires décalées; le rôle de σ^2 est similaire à celui joué par la variance dans la méthode de Monte Carlo.

$$\sigma^2 := \sigma^2(F, \theta) = \text{Var}(F) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(F \circ \theta^k, F); \tag{2}$$

ce résultat est vrai pour toute transformation mélangeante en particulier les transformations θ^n , $n \in \mathbb{N}$.

1. Introduction

Soit L un opérateur elliptique défini sur un domaine borné $D \in \mathbb{R}^n$ de bord régulier. On considère l’opérateur linéaire du second ordre:

$$L u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u \tag{3}$$

où $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ et c sont des fonctions du domaine D dans \mathbb{R} . On suppose que l’opérateur L est elliptique c’est à dire que pour tout $x \in D$ la matrice $(a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique définie positive. On cherche à résoudre le problème de Dirichlet suivant:

$$\begin{cases} L u(x) = f(x) & \text{dans } D, \\ u(x) = \phi(x) & \text{sur } \partial D \end{cases} \tag{4}$$

où f et ϕ sont des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . La matrice $(a_{ij}(x))$ étant définie positive, il existe alors une unique matrice $(\sigma_{ij}(x))$ définie positive vérifiant, $\sigma(x)\sigma(x) = a(x)$. On considère l’équation différentielle stochastique

$$dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dw_t \quad \text{et} \quad x_0 = x \in D \tag{5}$$

où $(w_t)_{t \leq 0}$ est un mouvement Brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on montre que sous certaines conditions de régularités le problème de Dirichlet (4) admet une solution unique et que cette solution est donnée par:

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left(\phi(x_\tau) \exp \left\{ \int_0^\tau c(x_s) ds \right\} \right) - \mathbb{E}_x \left(\int_0^\tau f(x_t) \exp \left\{ \int_0^t c(x_s) ds \right\} dt \right) \tag{6}$$

où $\tau := \inf \{t \geq 0 \text{ tel que } x_t \notin D\}$. La démonstration de ce résultat se trouve dans le livre de Friedman “stochastic differential equations and applications”, voir [7, Théorème 5.1, p. 145].

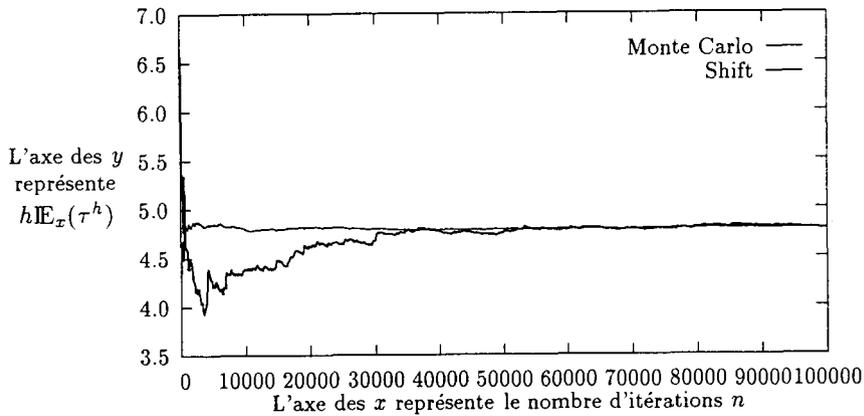


Fig. 1. Dans la représentation graphique $h = 0.1$.

Dans le cas particulier où les fonctions ϕ et c sont nulles et f est une fonction constante, C , la solution est donnée par $u(x) = -C\mathbb{E}_x(\tau)$. Pour calculer la solution u en un point x donné, on a utilisé la méthode du shift et on l'a comparé à la méthode de Monte Carlo classique. Une discrétisation par la méthode d'Euler de l'équation différentielle stochastique nous donne l'algorithme suivant:

$$\begin{cases} \bar{x}_0^h = x, \\ \bar{x}_{k+1}^h = \bar{x}_k^h + b(\bar{x}_k^h)h + \sigma(\bar{x}_k^h)\sqrt{h} g_{k+1} \end{cases}$$

avec $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de gaussiennes centrées réduites. Dans un premier temps, nous avons utilisé la méthode d'une façon naïve. On a calculé τ^h aux points successifs $g = (g_1, g_2, \dots, g_k, \dots)$, $\theta(g) = (g_2, g_3, \dots, g_{k+1}, \dots)$, ect, et on a pris la moyenne des termes.

2. Quelques résultats numériques de la première méthode

La solution du système différentiel, $\frac{1}{2}u''(x) = -1 \quad \forall x \in [-2, 2]$ et $u(2) = u(-2) = 0$, est donnée par $u(x) = \mathbb{E}_x(\tau)$, avec τ est le temps de sortie du mouvement Brownien standard $w(t)$ de l'intervalle $[-2, 2]$. Il est clair que $u(x) = 4 - x^2$ sur l'intervalle $[-2, 2]$. Pour calculer u au point 0, on considère l'algorithme $\bar{x}_0^h = 0$ et $\bar{x}_{k+1}^h = \bar{x}_k^h + \sqrt{h} g_{k+1}$, avec $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de gaussiennes centrées réduites et h est le pas de discrétisation. On approche $u(x) = \mathbb{E}_x(\tau)$ par $\mathbb{E}_x(h\tau^h)$, où $h\tau^h$ est le temps de sortie de la chaîne approximante. Une comparaison de la méthode du shift et de la méthode de Monte Carlo avec des pas de discrétisation de plus en plus fins, a donné les résultats dans les Figs. 1 et 2.

Ces courbes permettent d'observer que par la méthode du shift et avec un pas de discrétisation $h = 0.1$, une précision de 10^{-2} sur $h\mathbb{E}_x(\tau^h)$ est définitivement atteinte à partir de 40000 itérations alors que pour une valeur plus fine $h = 0.001$, après 40000 itérations, on observe encore des fluctuations de plus de $5 \cdot 10^{-1}$ en valeur absolue. On remarque donc que la vitesse de convergence dépend du pas de discrétisation. Ceci peut être expliqué par le raisonnement heuristique suivant. Pour un pas de discrétisation h donné, on calcule notre fonctionnelle sur une trajectoire brownienne $\omega \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$, puis sur la trajectoire décalée d'un pas de temps h ; après plusieurs itérations on prend la moyenne de Césaro. Le problème se présente lorsque h est trop petit, auquel cas on

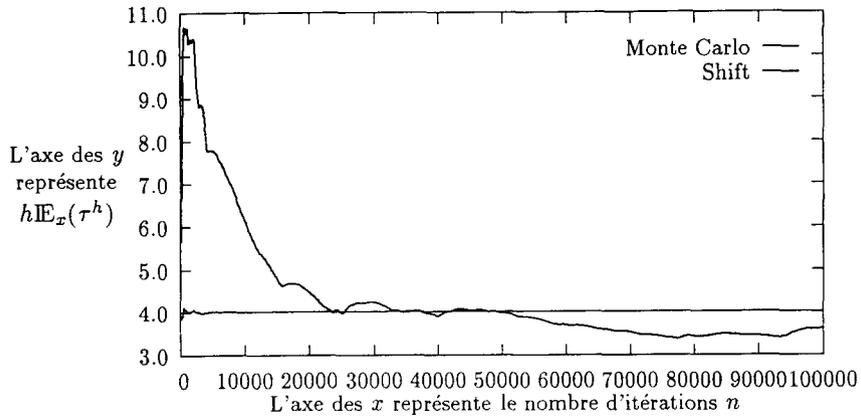


Fig. 2. Dans la représentation graphique $h = 0.001$.

reste pratiquement sur la même trajectoire et on augmente, donc, les corrélations. Les justifications théoriques sont données dans le paragraphe suivant.

2.1. *Interprétation des résultats obtenus*

Désignons par $\Omega = \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On munit Ω de la mesure de Wiener \mathbb{P} . Les trajectoires du mouvement brownien $(w_t)_{t \geq 0}$ sont définies par: $\forall \omega \in \Omega, w_t(\omega) = \omega(t)$. Pour h fixé on notera θ_h la transformation du shift définie sur Ω par $\theta_h w(\cdot) = w(\cdot + h)$. On désigne par $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle complétée du brownien (donc continue à droite puisque $(w_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants stationnaire). Considérons l'équation différentielle stochastique définie par:

$$\begin{cases} x_0 = x & x \in \mathbb{R}, \\ dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dw_t \end{cases} \tag{7}$$

où b et σ sont deux fonctions à valeurs réelles. On cherche à calculer $\mathbb{E}T$ où T est le temps de sortie du processus $(x_t)_{t \geq 0}$, d'un ensemble A donné, $T = \inf\{t \geq 0 \text{ tel que } x_t \notin A\}$. Sous certaines conditions sur A , le temps aléatoire T est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt (exemple A est un fermé). Une discrétisation de l'équation (7) par le schéma d'Euler nous suggère l'algorithme suivant:

$$\begin{cases} \bar{x}_0^h = x, \\ \bar{x}_{k+1}^h = \bar{x}_k^h + b(\bar{x}_k^h)h + \sigma(\bar{x}_k^h)\sqrt{h}g_{k+1} \end{cases} \tag{8}$$

avec $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de gaussiennes centrées réduites. Si l'on note par τ^h le temps de sortie de la chaîne $(\bar{x}_k^h)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\tau^h = \inf\{k \geq 0, \bar{x}_k^h \notin A\},$$

alors $\mathbb{E}_x(T)$ est approchée par $\mathbb{E}_x(h\tau^h)$. En outre, si l'on pose

$$\bar{x}_t^h = \bar{x}_k^h \quad \forall t \in [kh, (k+1)h[,$$

il est clair que le temps de sortie du processus $(\bar{x}_t^h)_{t \geq 0}$ vérifie $T^h := h\tau^h$. On dira par la suite que T^h est le temps de sortie de la chaîne approximante.

La vitesse de convergence pour le calcul de $\mathbb{E}_x(T^h)$ par la méthode du shift est contrôlée par $\sigma^2(T^h, \theta)$. Pour interpréter les résultats numériques obtenus, on s'intéressera au comportement asymptotique de $\sigma^2(T^h, \theta)$. Par ailleurs, pour définir $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que le mouvement brownien $(w_t)_{t \geq 0}$, il est commode de prendre

$$g_k^h = \frac{w_{kh} - w_{(k-1)h}}{\sqrt{h}} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Il est intéressant de noter que dans ce cas:

$$\begin{aligned} T^h \circ \theta^k(g_1^h(\omega), g_2^h(\omega), \dots) &= T^h(g_{k+1}^h(\omega), g_{k+2}^h(\omega), \dots) \\ &= T^h \circ \theta_{kh}(\omega), \end{aligned}$$

et que par suite $\sigma^2(T^h, \theta) = \text{Var}(T^h) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(T^h \circ \theta_{kh}, T^h)$. De plus, le temps de sortie T^h de la chaîne approximante est aussi un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt.

Pour plus de généralité, on considérera donc une variable aléatoire X , \mathcal{F}_T -mesurable et on supposera qu'il existe un processus $(X^h)_{h>0}$ qui approche X dans L^2 lorsque h converge vers 0 et que X^h est \mathcal{F}_{T^h} -mesurable pour tout $h > 0$. Dans la pratique le processus est obtenu à partir du schéma d'Euler. On désigne par

$$\sigma^2(h) := \sigma^2(X^h, \theta) = \text{Var}(X^h) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(X^h \circ \theta_{kh}, X^h), \tag{9}$$

et par

$$\tau^2(h) := \sigma^2(X, \theta) = \text{Var}(X) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(X \circ \theta_{kh}, X). \tag{10}$$

Dans la proposition suivante on montre que $\tau^2(h)$ est asymptote à $\sigma^2(h)$ lorsque h tend vers zéro.

Proposition 1. Soit $\varepsilon > 0$, fixé. Soient T et $(T^h)_{h>0}$ des $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ -temps d'arrêts vérifiant:

$$\begin{cases} T \leq T^h, \\ \sup_{h>0} \|T^h\|_{2+\varepsilon} < \infty \end{cases}$$

X est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable et $\forall h > 0$, X^h est \mathcal{F}_{T^h} -mesurable. Si X^h et $X \in L^2$ alors $\sigma^2(h)$ et $\tau^2(h)$ sont finis. En outre,

$$\text{si } \text{Var}(X - X^h) = o(h^{\frac{\varepsilon}{2}}) \quad \text{alors} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h(\sigma^2(h) - \tau^2(h)) = 0. \tag{11}$$

Preuve. Pour la démonstration voir référence [2]. \square

Malheureusement, en parcourant la littérature on est surpris de ne pas trouver des estimations de $\text{Var}(T - T^h)$. Cependant, il nous semble possible qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Var}(T - T^h) = o(h^\varepsilon)$.

Proposition 2. Soit $\varepsilon > 0$, fixé. Soit T un $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ -temps d'arrêts de $L^{2+\varepsilon}$ et X est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable alors $\lim_{h \rightarrow 0} h\tau^2(h) = 2 \int_0^\infty \varphi(s) ds$.

Preuve. Pour ce faire on montre que la fonction qui à t fait correspondre $\text{Cov}(X \circ \theta_t, X)$ est continue et qu'elle est intégrable sur $[0, \infty[$. Pour la démonstration voir référence [2]. \square

Corollaire 1. Soit $\varepsilon > 0$, fixé. Soient T et $(T^h)_{h>0}$ des $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ -temps d'arrêts vérifiant:

$$\begin{cases} T \leq T^h, \\ \sup_{h>0} \|T^h\|_{2+\varepsilon} < \infty. \end{cases}$$

Si l'on suppose que $\text{Var}(T - T^h) = o(h^{\frac{\varepsilon}{2}})$ alors $\sigma^2(h) = \sigma^2(T^h) = O(1/h)$

Preuve. Ce résultat découle des deux propositions précédentes. \square

Remarque. D'après le corollaire ci-dessus et les résultats numériques obtenus on conjecture qu'il existe ε tel que $\text{Var}(T - T^h) = o(h^\varepsilon)$ et par conséquent $\sigma^2(h) = O(1/h)$.

Cette étude asymptotique de $\sigma^2(h)$, pour h petit, nous a permis de choisir d'autres transformations ergodiques dont la vitesse de convergence *mathématique* est "indépendante" du pas de discrétisation, pour h petit. En outre, pour ces transformations on a conservé les particularités de l'implémentation informatique de la méthode du shift, c'est à dire une vitesse de convergence *informatique* plus grande que la méthode de Monte Carlo.

3. Comment utiliser la méthode du shift?

Pour diminuer les corrélations, nous avons décalé les trajectoires d'un pas de temps indépendant du pas de discrétisation. Autrement dit, pour un pas de discrétisation h donné, on calcule notre fonctionnelle sur une trajectoire brownienne $\omega \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$, puis sur la trajectoire décalée d'un pas de temps α , $\alpha > 0$; après plusieurs itérations on prend la moyenne de Césaro. Pour simplifier les notations, on prendra $\alpha = 1$ et $h = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que l'espérance du temps d'arrêt T est approchée par l'espérance du temps de sortie de la chaîne approximante T^h et que $T^h = h\tau^h$ où τ^h est le temps de sortie du schéma discrétisé. On a aussi considéré la discrétisation de l'équation (7) donnée par l'algorithme 8, avec

$$g_k^h = \frac{W_{kh} - W_{(k-1)h}}{\sqrt{h}}.$$

Le procédé proposé consiste à calculer τ^h aux points successifs $g^h, \theta^n(g^h), \theta^{2n}(g^h)$, ect. La vitesse de convergence est alors contrôlée par

$$\sigma^2(T^h, \theta^n) = \text{Var}(T^h) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(T^h \circ \theta_{nkh}, T^h). \quad (12)$$

En particulier et parce qu'on a choisit $nh = 1$ on a alors:

$$\sigma^2(T^h, \theta^n) = \text{Var}(T^h) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(T^h \circ \theta_k, T^h).$$

On cherche à montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma^2(T^h, \theta^n) = \sigma^2(T, \theta^n) = \text{Var}(T) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(T \circ \theta_k, T)$.

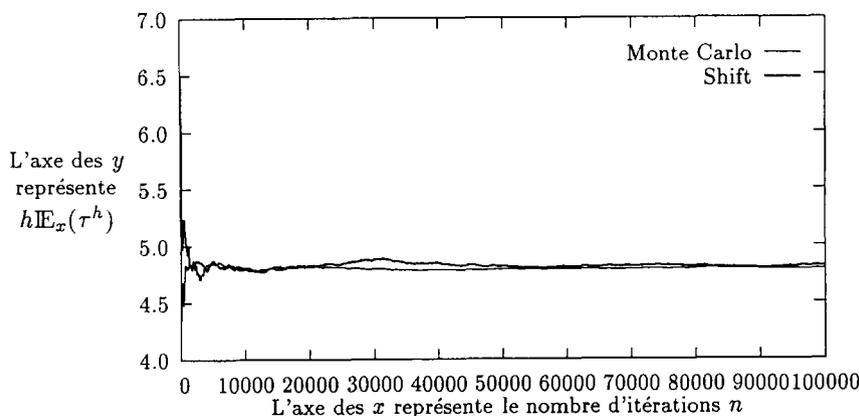


Fig. 3. Dans la représentation graphique $h = 0.1$.

Reprenons le cas général où X est \mathcal{F}_T -mesurable et X^h est \mathcal{F}_{T^h} -mesurable pour tout $h > 0$. Si l'on note par $\tilde{\sigma}^2(h) := \sigma^2(X^h, \theta^n)$ et par $\tilde{\tau}^2 := \sigma^2(X, \theta^n)$ on a alors le résultat suivant.

Proposition 3. Soit $\varepsilon > 0$, fixé. Soient T et $(T^h)_{h>0}$ des $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ -temps d'arrêts vérifiant:

$$\begin{cases} T \leq T^h, \\ \sup_{h>0} \|T^h\|_{2+\varepsilon} < \infty, \end{cases}$$

X est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable et $\forall h > 0$, X^h est \mathcal{F}_{T^h} -mesurable. Si X^h et $X \in L^2$ alors $\tilde{\sigma}^2(h)$ et $\tilde{\tau}^2$ sont finis. En outre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\sigma}^2(h) = \tilde{\tau}^2. \quad (13)$$

3.1. Illustration informatique

Nous avons voulu vérifier la validité du résultat obtenu ci-dessus par des simulations numériques. Nous avons repris l'exemple ci-avant et nous avons calculé u au point 0. Rappelons que la solution de ce système est donnée par $u(x) = \mathbb{E}_x(\tau)$, avec τ est le temps de sortie du mouvement Brownien standard $w(t)$ de l'intervalle $[-2, 2]$. Les résultats obtenus montrent que la vitesse de convergence a été améliorée (voir les Figs. 3 et 4).

Nous voyons donc la méthode de décalage appliquée de la façon expliquée au paragraphe ci-dessus apporte déjà une amélioration vis-à-vis de la méthode de Monte Carlo "classique" pour le temps de calcul sur machine en raison de l'économie de tirage de gaussiennes à chaque itération.

Mais on peut espérer aller beaucoup plus loin comme nous allons le discuter maintenant.

4. Emploi de la méthode du shift sur d'autres représentations du mouvement brownien

On peut montrer facilement à partir des propriétés suivantes:

- A t fixé, pour tous s , la variable aléatoire $w_{t+s} - w_s$ est une gaussienne centrée de variance t .

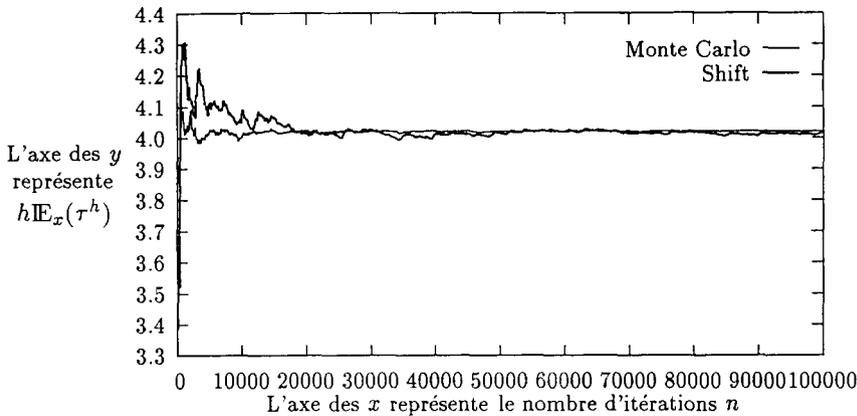


Fig. 4. Dans la représentation graphique $h = 0.001$.

- Pour $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N$, les variables aléatoires $w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_N} - w_{t_{N-1}}$ sont indépendantes.
que pour $s < t$,

$$\mathcal{L}(w_{(t+s)/2}/w_s = x, w_t = y) = \mathcal{N}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t-s}{4}\right),$$

c'est à dire que, conditionnellement aux valeurs déjà prises par le brownien aux temps s et t , la loi du brownien au temps $\frac{t+s}{2}$ est une gaussienne de moyenne $\frac{x+y}{2}$ et de variance $\frac{t-s}{4}$. Ainsi, pour simuler une trajectoire brownienne sur l'intervalle $[0, 1]$ par exemple, on commence par tirer les points $w_0 = 0, w_1$ de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, puis simuler $w_{\frac{1}{2}}$ par la propriété précédente et on fait alors de même pour obtenir $w_{\frac{1}{4}}, w_{\frac{3}{4}} \dots$. On dispose ainsi d'une procédure récursive qui permet, à la profondeur m , d'obtenir les valeurs de $(w_{k/2^m})_{0 \leq k \leq 2^m}$. Nous renvoyons à Faure [6] pour une comparaison numérique sur la simulation du mouvement brownien par la méthode récursive et la méthode itérative.

Comment peut-on utiliser la méthode du shift? Chaque réalisation fait intervenir des simulations de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites. Le mouvement brownien admet donc une représentation sur l'espace

$$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes \mathbb{N}}),$$

décrite par la procédure récursive. Supposons qu'on ait à simuler le mouvement brownien, sur l'intervalle $[0, 1]$ à une profondeur m , et qu'on ait donc utilisé les g_1, g_2, \dots, g_{2^m} premières coordonnées, alors la deuxième trajectoire "décalée" est calculée par la même procédure sur les coordonnées $(g_2, g_3, \dots, g_{2^{m+1}})$.

Toujours dans le même esprit: il est possible d'utiliser les développement de mouvement brownien sur la base de Haar, voir d'autres bases de $L^2[0, 1]$. En effet, soit $(\chi_n(t))_{n \geq 0}$ une base orthogonale de $L^2[0, 1]$, si l'on pose $\varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(s) ds$ alors pour toute suite $(g_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, considérée comme coordonnées de

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes \mathbb{N}}),$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\omega) \varphi_n(t)$ converge dans $C[0, 1]$ et dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $p \in [1, \infty[$, vers un mouvement brownien (voir [5]). Dans ce cas aussi le mouvement brownien admet une représentation

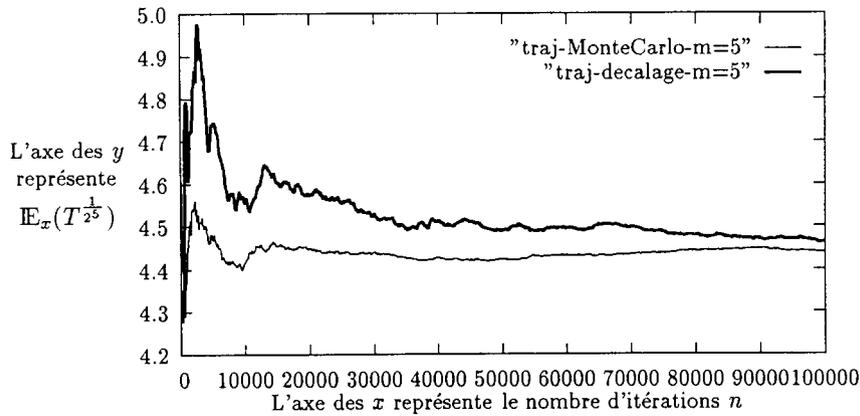


Fig. 5. Dans la représentation graphique $m = 5$ autrement dit $h = 1/2^5$.

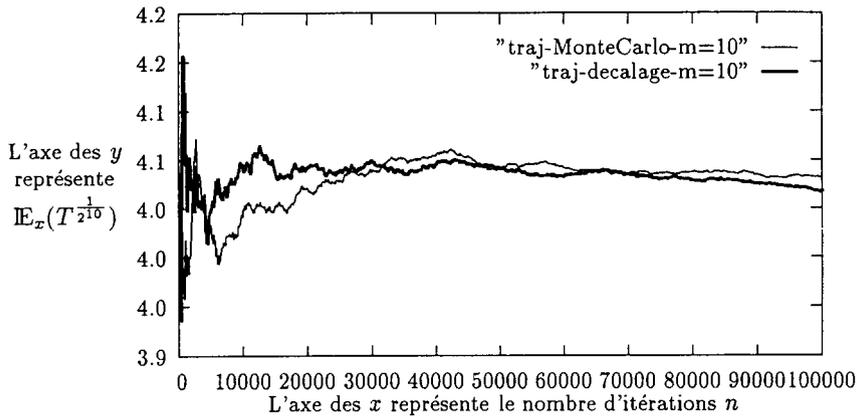


Fig. 6. Dans la représentation graphique $m = 10$ autrement dit $h = 1/2^{10}$.

sur

$$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes N}),$$

décrite par la série ci-dessus. Comment peut-on utiliser la méthode du shift? Supposons qu'on ait à simuler le mouvement brownien, sur l'intervalle $[0,1]$ par $\sum_{n=0}^N g_n(\omega) \varphi_n(t)$, avec une précision fixée au début, et qu'on ait donc utilisé les g_1, g_2, \dots, g_N premières condonnées, alors la deuxième trajectoire "décalée" est donnée par $\sum_{n=0}^N g_{n+1}(\omega) \varphi_n(t)$. Ce sont, donc, les gaussiennes qui sont décallées et non la trajectoire. Par suite, on peut espérer que la corrélation entre les trajectoires soit moins importante.

La base de Haar est définie par: soit $\chi = 1_{[0, \frac{1}{2}]} - 1_{[\frac{1}{2}, 1]}$; si l'on pose $\chi_{m,k}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \chi(2^m t - k)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, alors les fonctions $(\chi_{m,k})_{m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}}$ forment une base de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Nous renvoyons à Bouleau [5] pour plus de détails.

4.1. Quelques résultats numériques

Le but de cette section est d'observer expérimentalement, sur le même exemple, la vitesse de convergence. Pour une profondeur de plus en plus grande on a obtenu les résultats dans les Figs. 5 et 6.

Les résultats numériques obtenus sont très encourageants. Nous espérons obtenir une estimation a priori de σ^2 permettant de justifier ces résultats.

References

- [1] M. B. Alaya, Sur la méthode du shift en simulation, in: N. Bouleau et D. Talay, eds., Probabilités Numériques, Vol. 10, INRIA (1992) 61–66.
- [2] M. B. Alaya, Les théorèmes ergodiques en simulation, Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.
- [3] M. B. Alaya, On the simulation of expectations of random variables depending on a stopping time, Stochastic Analysis Appl. 11 (1993) 133–153.
- [4] N. Bouleau, On effective computation of expectations in large or infinite dimension, J. Comput. Appl. Math. 31 (1990) 23–34.
- [5] N. Bouleau, On numerical integration by the shift and application to Wiener space, Acta Appl. Math. 25 (1991) 201–220.
- [6] O. Faure, Simulation du mouvement brownien et des diffusions, Thèse de l'école nationale des ponts et chaussées, 1992.
- [7] A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications (Academic Press, New York, 1975).
- [8] U. Krengel, Ergodic theorems, de Gruyter Stud. Math. (1985).