Master math-info 2012-2013
Travaux dirigés de Statistique 4
Tests d'hypothèses simples et composites

Exercice 1 *Soit* $\overline{x} = 20$ *obtenu à l'aide d'un échantillon de taille* 50 *de loi gaussienne d'écart type* $\sigma = 5$. *Tester* $H_0: \ \mu = 30$ *contre* $H_1: \ \mu = 29$ *pour un risque de premier espèce* $\alpha = 0.05$.

Exercice 2 *On considère un n-échantillon de loi exponentielles* $\mathcal{E}_\lambda$.

1. *Trouver les formes optimales des zones de rejets pour tester* $H_0: \ \lambda = \lambda_0$ *contre* $H_1: \ \lambda = \lambda_1$ *au nniveau* α*en supposant que* $\lambda_1 < \lambda_0$.
2. *Lorsque* $n = 100$, $\lambda_0 = 5$, $\lambda_1 = 4$ *et* $\alpha = 0.05$, *calculer la puisaance de ce test. Donner le résultat obtenu lorsque* $\bar{x}_n = 0.21$.

Exercice 3 *Soit* $X = (X_1, \cdots, X_n)$ *un n-échantillon de loi* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. *On sait que* $\sigma^2 = 25$.

1. *Construire le test de Neyman-Pearson de* $\mu = 50$ *contre* $\mu = 55$ *de niveau* $\alpha = 0.05$.
2. *Quelle est la puissance de ce test ?*
3. *Sachant que* $n = 20$ *et que sur notre échantillon on a obtenu* $\overline{X}_{20} = 50.63$, *quel est le resultat du test ?*
4. *Construire le test UPP de niveau* $\alpha = 0.05$ *de* $\mu = 50$ *contre* $\mu < 50$. *Quel est le résultat de ce test sur les données précédentes ?*
5. *Reprendre la question précédente lorsque* σ *n'est pas connue.*
6. *On veut tester maintenant* $\sigma = 5$ *contre* $\sigma \neq 5$. *Construire un test de niveau* $\alpha = 0.05$ *en supposant d'abord* μ *connue égale à* 50 *puis* μ *inconnue. Quels sont les resultats de ces tests sur nos données ? (On donne* $\sum_{i=1}^{20}(X_i - 50)^2 = 394.4$*).*

Exercice 4 *On veut vérifier qu'une pièce est bien équilibrée. Pour cela on effectue 100 lancers et l'on modélise le résultat du i-ème lancer comme la réalisation d'une variable de Bernouilli* X_i.

1. *Construire le test de* $\theta = 1/2$ *contre* $\theta \neq 1/2$ *de niveau* $\alpha = 0.05$.
2. *Quelle doit être au plus l'écart entre la proportion de "piles" et celle de "faces" pour que l'hypotèse* H_0 *soit retenue ?*
3. *Déterminer l'expression de la puissance de ce test en fonction de* θ *pour* $\theta \neq 1/2$.
4. *Calculer sa valeur pour* $\theta = 1/3$.

Exercice 5 *On veut tester si une pièce d'or est bien en or ou si elle a été fraudée (par un mélange avec un autre métal). On sait qu'une pièce en or pèse exactement* $m_0 = 19,3$ *grammes. La balance sur laquelle on pèse donne le poids de la pièce avec une erreur gaussienne d'espérance nulle (pas de biais) et d'écart type* $0,2$ *(il dépend de la précision de la balance). On effectue avec la même pièce dix mesures que l'on peut supposer indépendantes. Les résultats sont les suivants :*

18.83 19.03 18.61 19.46 18.80 18.96 19.37 19.20 18.88 19.34.

1. *Tester au niveau* $\alpha = 0.1$ $m = m_0$ *contre* $m < m_0$
2. *Calculer l'erreur de seconde espèce du test si* $m = 19.1$
3. *Chercher le nb de pesées nécessaires pour que l'erreur de seconde espèce définie au 2) soit inférieure ou égale à* 0.1.
4. *Peut-on accepter l'hypothèse* $\sigma = 0.2$ *(au niveau* $\alpha = 0.05$*)?*

Exercice 6 *Afin de mesurer les effets d'un nouveau régime amaigrissant, celui-ci a été testé sur 15 individus pris au hasard dans une population. Le tableau suivant donne le poids (en kg) avant et après régime.*

Avant	70	75	80	60	64	66	70	74	78	80	82	90	101	84	77
Après	58	76	74	58	65	60	70	70	75	79	78	95	103	80	74

1. *En supposant que le poids se distribue selon une loi normale, peut-on affirmer au niveau* $\alpha = 0,10$ *que le nouveau régime est efficace?*