Master math-info 2012-2013
Travaux dirigés de Statistique 2
estimateur bayésien, estimateur du maximum de vraisemblance, borne de Cramer-Rao

Exercice 1 *Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On considère les deux estimateurs $\overline{X_n}$ et ${S'_n}^2$. Montrer qu'il s'agit de deux estimateurs sans biais de λ. Quel estimateur préconiseriez-vous?*

Exercice 2 *Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{B}(\theta)$. On considère les deux estimateurs $\hat{\theta}$ et $\tilde{\theta}$ de θ suivants :*

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n, \quad \tilde{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i/(n+1).$$

1. *Calculer les fonctions de biais b et $\tilde{b}$ associées à nos deux estimateurs.*

2. *Donner une expression en fonction de θ et de n des fonctions de risque quadratique $R(\hat{\theta}, \theta)$ et $R(\tilde{\theta}, \theta)$. Peut-on dire que l'un des estimateur est meilleur que l'autre?*

Exercice 3 *Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer l'estimateur de Bayes T_σ de θ relatif la loi priori $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, la fonction de risque et le risque de Bayes de T_σ.*

Exercice 4 *Soit X une variable aléatoire à densité de probabilité $f_\lambda(x)$,*

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x), \quad \lambda > 0.$$

1. *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une réalisation d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}$ obtenu à l'aide de ce n-échantillon.*

2. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $\hat{\lambda}$. A-t-on un estimateur non biaisé? Un estimateur fortement consistant?*

3. *On modélise la durée séparant deux appels successifs arrivant à un standard téléphonique par une loi de densité $f_\lambda(x)$. Déterminer la valeur de l'estimateur $\hat{\lambda}$ dans le cas où $n = 5$ et les valeurs observées sont*

1,2	7,5	1,8	3,7	1,1.

Exercice 5 *On modélise à présent la durée séparant deux appels successifs arrivant à un standard téléphonique par une loi exponentielle $\mathcal{E}_\mu$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{E}(\mu)$.*

1. *Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour μ. Est-ce un estimateur sans biais ? Calculer son biais.*

2. *Comparer avec les résultats du dermier exercice. Voyez-vous une règle générale apparaître à la lumière des deux derniers exercices ?*

3. *Déterminer la valeur de l'estimateur $\hat{\mu}$ dans le cas du 5-échantillon donné dans le premier exercice.*

Exercice 6 $\Theta =]0,1[$, *on considère la famille des lois $(\mathcal{G}(\theta))_{\theta\in\Theta}$ telle que et si $X \sim \mathcal{G}(\theta)$ alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et*

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = \theta(1-\theta)^k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

1. *Soit $X \sim \mathcal{G}(\theta)$. Calculer $\mathbb{E}_\theta(X)$.*

2. *Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{G}(\theta)$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.*

Exercice 7 *On considère ici un échantillon de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.*

1. *Calculer l'information de Fisher $I_n(\lambda)$.*

2. *On considère l'EMV $\hat{\lambda}_n$ de λ. Calculer son risque quadratique et montrer que lorsque n tend vers l'infini, $n(R(\hat{\lambda}_n, \lambda) - I_n^{-1}(\lambda))$ tend vers 0.*

3. *Vérifier que c'est un estimateur fortement consistant. En écrivant que $\hat{\lambda}_n = \psi(\overline{X}_n)$ pour une fonction ψ adéquate, montrer que $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda)$ tend en loi vers une gaussienne $\mathcal{N}(0, I_1^{-1}(\lambda))$.*

Exercice 8 *Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.*

1. *En notant $\theta = (\mu, \sigma^2)$, montrer que la matrice d'information de Fisher est donnée par*

$$I_n(\theta) = \frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(2\sigma^2) \end{pmatrix}.$$

2. *On considère l'estimateur efficace sans biais $\hat{\theta}_n = (\overline{X}_n, {S'_n}^2)$ de θ. Montrer que $\overline{X}_n$ et ${S'_n}^2$ sont indépendants et calculer la matrice de variance-covariance de $\hat{\theta}$.*

3. *La borne de Cramer-Rao est-elle atteinte ? Montrer que*

$$n(\Sigma_\theta^2 - I_n^{-1}(\theta)) \longrightarrow 0,$$

lorsque n tend vers l'infini.