Master math-info 2012-2013
Travaux dirigés de Statistique 1
Quelques familles paramétriques et leurs propriétés

Exercice 1 *1. Montrer que pour tout* $\lambda > 0$ $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx \; < \; \infty$.

2. *Montrer par une intégration par partie que* $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$.

3. *Calculer* $\Gamma(1)$ *et en déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

4. *Montrer que* $\Gamma(1/2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy$. *Montrer alors que* $\Gamma(1/2)^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}drd\theta$. *En déduire que* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2 *Pour tout* $m \in \mathbb{R}$ *et tout* σ, *on considère la famille de densité* $f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. *Si* X *est une v.a.r de loi* $f_{m,\sigma^2}(x)dx$, *on dira que* X *est un v.a. gaussienne de loi* $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *(noté* $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$*). On rappelle que sa fonction caractéristique est donnée par* $\mathbb{E}(e^{itX}) = \exp(itm - t^2\sigma^2/2)$.

1. *Montrer que si* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ *alors* $Y = m + \sigma X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

2. *En déduire que si* $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *alors* $\mathbb{E}(X) = m$ *et* $Var(X) = \sigma^2$.

3. *Montrer que si* $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$ *et* X_1 *est indépendante de* X_2, *alors* $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

4. *Montrer que le modèle statistique associé à un n-échantillon* $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *de loi* $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *est un modèle exponentiel.*

5. *Trouver des estimateurs fortement consistants et sans biais de* m *et* σ^2.

Exercice 3 *Pour tout* $\alpha > 0$ *et* $\lambda > 0$, *on considère la famille de densités sur* $\mathbb{R}_+$ *définie par* $\gamma_{\lambda,\alpha}(x) = \alpha^\lambda x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}/\Gamma(\lambda)$. *Si* X *est une v.a.r. de loi* $\gamma_{\lambda,\alpha}(x)dx$ *sur* $\mathbb{R}+$, *on dira que* $X \sim \Gamma(\lambda,\alpha)$. *On rappelle que sa fonction caractéristique est donnée par* $\mathbb{E}(e^{itX}) = (1 - \frac{it}{\alpha})^{-\lambda}$.

1. *Montrer que* $\mathbb{E}(X^t) = \alpha^{-t}\Gamma(\lambda+t)/\Gamma(\lambda)$. *En déduire que* $\mathbb{E}(X) = \lambda/\alpha$ *et* $Var(X) = \lambda/\alpha^2$.

2. *Montrer que si* $X \sim \Gamma(\lambda,1)$ *alors* $X/\alpha \sim \Gamma(\lambda,\alpha)$.

3. *Montrer que si* X_1 *et* X_2 *sont deux v.a.r. indépendantes de lois respectives* $\Gamma(\lambda,\alpha)$ *et* $\Gamma(\lambda,\alpha)$ *alors* $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\lambda_1+\lambda_2,\alpha)$.

4. *Montrer que le modèle statistique associé à un n-échantillon* $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *de loi* $\Gamma(\lambda,\alpha)$ *est un modèle exponentiel.*

5. *Donner une statistique exhaustive du modèle.*

6. *Trouver des estimateurs fortement consistants de α et λ.*

Exercice 4 *Pour tout $\alpha > 0$, on dit qu'une v.a.r. suit une loi exponentielle de paramètre α si $X \sim \Gamma(1, \alpha)$. En particulier, la densité est portée par $\mathbb{R}_+$ et est donnée par $\alpha e^{-\alpha x}$.*

1. *Montrer que si $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha}$ et $Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$.*
2. *Montrer que le modèle statistique associé à un n-échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de loi $\mathcal{E}(\alpha)$ est un modèle exponentiel.*
3. *Donnner la statistique privilégée du modèle.*
4. *Trouver un estimateur fortement consistant de α. Calculer son biais.*
5. *Calculer son risque quadratique.*
6. *Trouver un estimateur sans biais de α.*
7. *Montrer en utilisant un théorème du cours que cet estimateur est un estimateur de variance minimale.*

Exercice 5 *Pour tout $\theta \in [0, 1]$, on dit qu'une v.a.r X suit une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(\theta)$, si la loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = \theta$.*

1. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.*
2. *Montrer que le modèle statistique associé à un n-échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de loi $\mathcal{B}(\theta)$ est un modèle exponentiel.*
3. *Soit $\overline{X}_n$ la moyenne empirique. On cherche à estimer la variance $\theta(1 - \theta)$. On se propose l'estimateur $T = \overline{X}_n(1 - \overline{X}_n)$.*
   (a) *Montrer que T n'est pas un estimateur sans biais de la variance.*
   (b) *Montrer qu'il existe un estimateur sans biais S de la variance multiple de T.*
   (c) *Montrer en utilisant un théorème du cours que cet estimateur est un estimateur de variance minimale.*

Exercice 6 *Pour tout $\lambda > 0$, on dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Poisson de paramètre λ (noté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si la loi de X est donnée par*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

1. *Calculer $\mathbb{E}(t^X)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
2. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.*
3. *Montrer que le modèle statistique associé à un n-échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est un modèle exponentiel.*
4. *Trouver un estimateur fortement consistant de λ. Est-il sans biais?*
5. *On cherche maintenant à estimer $e^{-\ell\lambda}$, probablité pour que sur ℓ expériences futures, on observe toujours 0. On propose l'estimateur, $e^{-\ell\overline{X}}$. Est-il sans biais?*