Master Math-Info 1 ère année, Université Paris13
Processus stochastiques à temps discret (2009-2010)

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 *Soit* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. positives indépendantes d'esperance* 1 *et* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_k; k \leq n)$. *On pose* $X_0 = 1$ *et* $X_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k$.

1. *Montrer que* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une martingale et en déduire que* $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ *est une sur-martingale.*
2. *On suppose que* $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) = 0$. *Étudier la convergence et la limite de* $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ *puis de* $(X_n)_{n\geq 0}$.
3. *On suppose que* $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) > 0$. *Montrer que* $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ *est une suite de Cauchy dans* L^2.

Exercice 2 *Soit* $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré et* ν *une mesure finie sur* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. *On suppose que pour tout* $n \geq 0$, $\mathbb{P}$ *domine* ν *sur* $\mathcal{F}_n$ *et on note* X_n *la densité de Radon-Nikodym:* X_n *est donc* $\mathcal{F}_n$*-mesurable et*

$$\nu(A) = \int_A X_n d\mathbb{P}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ *(en particulier* $X_n \geq 0$*).*

1. *Montrer que* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une martingale.*
2. *Montrer que* $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge p.s. vers une variable aléatoire intégrable* X.

Exercice 3 *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale intégrable définie sur un espace* $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ *et soit* ν *un temps d'arrêt vérifiant*

$$\mathbb{P}(\nu < +\infty) + 1, \qquad \mathbb{E}|X_\nu| < +\infty, \qquad \int_{\{\nu > n\}} |X_n| d\mathbb{P} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. *Montrer que*
$$\int_{\{\nu > n\}} |X_\nu| d\mathbb{P} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. *Montrer que* $\mathbb{E}|X_{\nu\vee n} - X_\nu| \to 0$.
3. *En déduire que* $\mathbb{E}X_\nu = \mathbb{E}X_0$.