Master Math-Info 1 ère année, Université Paris13
Processus stochastiques à temps discret (2009-2010)

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ *un espace filtré,* τ *et* ν *deux temps d'arrêt de la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*,* $\mathcal{F}_\tau$ *(resp.* $\mathcal{F}_\nu$*) la tribu des ́vénements antérieurs à* τ *(resp.* ν*). Montrer que*

1. $\tau \wedge \nu$, $\tau \vee \nu$, $\tau + \nu$ *sont des temps d'arrts*
2. *si* $\tau \leq \nu$ *alors* $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\nu$
3. $\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu$

Exercice 2 *Soient* X *une v.a. aléatoire positive ou intégrable et* ν *un temps d'arrêt. Posons, pour tout* $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$*. Montrer que* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = X_\nu$ *p.s..*

Exercice 3 *Soit* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par* $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p = 1-\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1-q$*. On définit* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $S_0 = 0$ *et* $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$*.*

1. *Soit* $T = T_{a,b} = \inf\{n \geq 0,\ S_n = -a \text{ ou } S_n = b\} \quad (a, b \in \mathbb{N})$*. Montrer que* T *est un temps d'arrêt.*
2. *On suppose que* $p = q = \frac{1}{2}$*, déduire de* $\mathbb{E}(S_T)$ *la probabilité de l'événement* $(S_T = -a)$*.*
3. *Montrer que* $Z_n = S_n^2 - n$ *est une martingale, déduire de* $\mathbb{E}(Z_T)$ *la valeur de* $\mathbb{E}(T)$*.*
4. *On suppose que* $p > q$ *et on pose* $\mu = \mathbb{E}(Y_k)$*. Montrer que*

$$X_n = S_n - n\mu \quad \text{et} \quad X'_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$$

   sont des martingales. En déduire $\mathbb{P}(S_T = -a)$ *et* $\mathbb{E}(T)$*.*

Exercice 4 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires positives indépendantes et intégrables. On pose* $\mathbb{E}(X_k) = m_k$*,* $S_0 = \tilde{S}_0 = 1$*,* $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n X_k$ $\tilde{S}_n = 1 + \sum_{k=1}^n \prod_{p=1}^k X_p$*,* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ *pour* $n \geq 1$*,* $\mathcal{F}_0$ *la tribu triviale.*

1. *Vérifier que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\tilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont des* $\mathcal{F}_n$ *sous martingales.*
2. *Démontrer que pour tout* n *et tout* $a > 0$ *:*

$$\mathbb{P}[\sup_{p\leq n} S_p > a] \leq \frac{1 + \sum_{k=1}^n m_k}{a}$$

$$\mathbb{P}[\sup_{p\leq n} \tilde{S}_p > a] \leq \frac{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{p=1}^k m_p}{a}$$

3. *On suppose que* X_k *suit la loi exponentielle de paramètre* λ_k *pour tout* k*. Calculer la transformée de Laplace* $\mathbb{E}(\exp(-tX_k))$ *de* X_k*.*

4. *Pour tout réel positif* α *on pose* $Z_k = \frac{\alpha+\lambda_k}{\lambda_k}\exp(-\alpha X_k)$, $k \geq 1$*. Montrer que* $M_n = \prod_{k=1}^n Z_k$, $n \geq 1$*, définit une* $\mathcal{F}_n-$*martingale.*

5. *Montrer que* $(M_n)_{n\geq 1}$ *converge p.s.*