

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires intégrables. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Montrer que les suites $(X_n)_{n \geq 1}$ suivantes sont des martingales relativement à \mathcal{F}_n :

1. $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ où $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées.
2. $X_n = \left(\sum_{k=1}^n Y_k\right)^2 - n\sigma^2$ où $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et de variance σ^2 .
3. Rapport de vraisemblance : Soient f_0 et f_1 deux densités de probabilités ($f_0 > 0$) et $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f_0 . On prend

$$X_n = \frac{f_1(Y_1) \cdots f_1(Y_n)}{f_0(Y_1) \cdots f_0(Y_n)}.$$

Si $f_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $f_0 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ que vaut X_n .

Exercice 2 Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux martingales (respectivement sur ou sous martingales), montrer que pour tous réels a et b (respectivement pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$), $aX_n + bY_n$ est encore une martingale (respectivement une sur ou sous martingale).

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{2}{3} - a_n$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = a_n$, où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels à valeurs dans $]0, \frac{2}{3}[$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$.

1. Donner une condition sur la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ pour que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une sur-martingale (respectivement une sous-martingale, respectivement une martingale) par rapport à la filtration \mathcal{F}_n .
2. Pour une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on pose $M_n = S_n - \alpha_n$. Trouver $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une martingale nulle en 0 ($M_0 = 0$).
3. Montrer qu'il existe une suite réelle $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(M_n^2 - \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale.
4. Soit $T = \inf\{n \geq 1, S_n > 0\}$. Calculer M_T .