

## Feuille d'exercices 2

**Exercice 1** Soient  $X$  une variable aléatoire réelle de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\varepsilon$  une variable aléatoire réelle de loi  $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$ , indépendante de  $X$ .

1. Montrer que la variable  $Y = \varepsilon X$  est gaussienne et que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .
2. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont elles indépendantes?
3. Le vecteur aléatoire  ${}^t(X, Y)$  est-il gaussien?

**Exercice 2** Soit  $V = {}^t(X, Y, Z)$  un vecteur aléatoire de dimension 3. On suppose que la loi de  $V$  est  $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ , où  $\Gamma$  est la matrice définie par

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la fonction caractéristique de  $V$ ?
2. Montrer que le couple  $(X, Y)$  est indépendant de  $Z$ .
3. Quelles sont les lois marginales? Donner la loi du couple  $(X, Y)$ .
4. Le couple  $(X, Y)$  admet-t-il une densité? Si oui la calculer.
5. Déterminer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X|Y)$ .
6. Déterminer la loi du couple  $(X - \mathbb{E}(X|Y), \mathbb{E}(X|Y))$ .
7. Déterminer la loi de  $X$  sachant  $Y$ .