MACS3, Master Mathématiques et Informatiques, Université Paris13
Calcul stochastique et applications à la finance (2011-2012)

Feuille d'exercices 9

Exercice 1 *1. Si $t > 0$ écrire la densité $y \mapsto p_t(y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue de la loi de W_t. Que peut-on dire lorsque $t = 0$?*

2. Soit f une fonction réelle borélienne bornée. Posons $\varphi(t,x) = \mathbb{E}(f(x + W_t))$. Vérifier que φ est solution du problème parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ \varphi(0,x) = f(x). \end{cases}$$

Exercice 2 *Soit $x \in \mathbb{R}$, $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 dont les dérivées sont bornées. Considérons l'équation*

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t)\, dW_t + b(X_t) dt \\ X_0 = x \end{cases}$$

1. *Justifier l'existence d'une unique solution $(X_t)_{t \geq 0}$, à une version indistinguable près, dans la famille des processus adaptés.*
2. *Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ tel que f' est borné. On considère*

$$Y_t = f(X_t) - f(x) - \int_0^t f'(X_s)\, b(X_s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, a^2(X_s)\, ds.$$

   Vérifier que $(Y_t)_{t \geq 0}$ est une martingale (utiliser la formule d'Itô).
3. *Soit $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ le processus défini au point précédent. Soit τ un temps d'arrêt. Vérifier que le processus arrêté Y^τ est une martingale par rapport à une filtration à déterminer. Rappelons que $Y_t^\tau = Y_{t \wedge \tau}$.*
4. **Formule de Dynkin**. *Supposons τ borné. Soit (X_t) la solution de l'équation 2. Soit f de classe C^2 à support compact. Vérifier que*

$$\mathbb{E}(f(X_\tau)) - f(x) = \mathbb{E}\{\int_0^\tau [f'(X_s)\, b(X_s) + \frac{1}{2} f''(X_s)\, a^2(X_s)]\, ds\}.$$