MACS3, Master Mathématiques et Informatique, Université Paris13
2012-2013

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 *Soit* $\mu \in \mathbb{R}, \sigma, s_0 \geq 0$. *Posons* $Z_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$.

1. *Vérifier que* Z_t *est un processus d'Itô.*
2. *Déduire, en utilisant la formule d'Itô, que* $S_t = s_0 exp(Z_t)$ *est une solution de l'équation*

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\ S_0 = s_0 \end{cases}$$

Exercice 2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck : *soit* $(X_t, t \in [0, T])$ *une solution de*

$$\begin{cases} dX_t = -c\, X_t\, dt + \sigma\, dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

1. *Ecrire la forme intégrale du problème précédent (sans résoudre).*
2. *Posons* $Y_t = e^{ct} X_t$, $t \geq 0$. *Par la formule d'intégration par parties déduire que*

$$Y_t = x + \sigma \int_0^t e^{cs} dW_s.$$

3. *Déduire la valeur de* $\mathbb{E}(Y_t)$ *et* $\mathbb{E}(X_t)$.
4. *Déduire la valeur de* $Var(Y_t)$.
5. *Est-ce que* X_t *converge en loi lorsque t tend vers l'infini ?*

Exercice 3 *On s'intéresse à la solution* X_t *de l'équation différentielle stochastique :*

$$\begin{cases} dX_t &= (\mu X_t + \mu')dt + (\sigma X_t + \sigma')dW_t \\ X_0 &= 1. \end{cases}$$

On suppose $S_t = \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$.

1. *Ecrire l'équation différentielle stochastique dont est solution* S_t^{-1}.
2. *Démontrer que :*

$$d(X_t S_t^{-1}) = S_t^{-1}((\mu' - \sigma\sigma')dt + \sigma' dW_t).$$

3. *En déduire une expression pour* X_t.