

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 *Ecrire les processus suivants comme des processus d'Itô en précisant leur drift et leur coefficient de diffusion*

1. $X_t = W_t^2$
2. $X_t = t + e^{W_t}$
3. $X_t = W_t^3 - 3tW_t$
4. $X_t = 1 + 2t + e^{W_t}$
5. $X_t = (W_t^1)^2 + (W_t^2)^2$
6. $X_t = (W_t + t) \exp(-W_t - \frac{1}{2}t)$
7. $X_t = \exp(t/2) \sin(W_t)$

Exercice 2 *Soit $X_t = \exp(\int_0^t a_s ds)$ et*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left[b_s \exp\left(-\int_0^s a_u du\right) \right] dW_s,$$

où a et b sont des fonctions déterministes. On pose $Z_t = X_t Y_t$. Montrer

$$dZ_t = a_t Z_t dt + b_t dW_t.$$

Exercice 3 *Soit $Y_t = X_t^1 X_t^2$ avec*

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= b_t dt + \sigma_t^1 dW_t \\ dX_t^2 &= \sigma_t^2 dW_t. \end{aligned}$$

Calculer dY_t .

Exercice 4 *Soit $Y_t = \int_0^t e^s dW_s$ et $Z_t = \int_0^t Y_s dW_s$.*

1. *Ecrire Z_t comme processus d'Itô.*
2. *Calculer $\mathbb{E}(Z_t)$, $\mathbb{E}(Z_t^2)$ et $\mathbb{E}(Z_t Z_s)$.*

Exercice 5 Processus d'Ornstein Uhlenbeck : *Soit X tel que $dX_t = (a - bX_t)dt + dW_t$*

1. *Montrer que $Z_t = \exp\left(c \int_0^t X_s dW_s - \frac{c^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds\right)$ est une martingale locale.*
2. *Soit $U_t = X_t^2$. Ecrire U_t comme processus d'Itô.*
3. *Montrer que $\int_0^t X_s dW_s = \frac{1}{2}(X_t^2 - X_0^2 - t) - a \int_0^t X_s ds + b \int_0^t X_s^2 ds$.*