1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur
TD 6

Exercice 1 *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes telles que*

$$P(X_n = \sqrt{n}) = P(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.
a) Calculer la fonction caractéristique de Y_n.
b) Etablir pour $|a_k| \leq 1, \;\; |b_k| \leq 1, \;\; k = 1 \ldots n$ *l'inégalité* $|\prod_1^n a_k - \prod_1^n b_k| \leq \sum_1^n |a_k - b_k|$. *En déduire une estimation de* $|\phi_{Y_n}(t) - \prod_1^n \exp(-\frac{t^2 k}{2n^2})|$ *puis la limite en loi de* (Y_n).

Exercice 2 *Soient* (X_n) *et* (Y_n) *2 suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité vers* X *et* Y.
a) Montrer que $(aX_n + bY_n)$ *converge en probabilité vers* $aX + bY$.
b) Plus généralement, si $f \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est uniformément continue alors* $f(X_n, Y_n)$ *converge en probabilité vers* $f(X, Y)$.

Exercice 3 *Soient* (X_n) *et* (Y_n) *2 suites de variables aléatoires qui convergent en loi vers* X *et* Y.
a) Montrer que $(X_n + Y_n)$ *ne converge pas forcément en loi vers* X+Y. *Même question pour le produit* $(X_n.Y_n)$.
b) On suppose que Y=a $(a \in R)$ *p.s. Montrer que* (Y_n) *converge en probabilité vers* a.

Exercice 4 *Soient* (a_n) *et* (b_n) *2 suites réelles,* $b_n > 0$. *Etudier les suites* (δ_{a_n}) *et* $\mathcal{N}(a_n, b_n)$.

Exercice 5 *Soit* f *une fonction continue et bornée sur* $\mathbb{R}^+$ *montrer que :*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n}) = f(\lambda).$$

Démontrer que si f *est continue sur* $[0, 1]$ *et* $p \in [0, 1]$ *alors*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq 0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n}) = f(p).$$

Exercice 6 *Soit* (X_n) *une suite de variables indépendantes de même loi* $e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$.
a) Calculer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

b) On pose $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$*; calculer* ϕ_{Z_n} *ainsi que sa limite quand* n *tend vers l'infini.*
c)Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}dx = \frac{1}{2}.$$

d) Soit f_n *la densité de* Z_n*; à l'aide de l'inversion de Fourier trouver* $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$*.*
e) En déduire la formule de Stirling.

Exercice 7 *L'hypothèse de variables intégrables ne peut être supprimée dans la loi (forte, ou faible) des grands nombres :*
Soit (X_n) *une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées suivant la loi de Cauchy de paramètre* a*.*
a) Quelle est la loi de $Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ *?*
b) Quelle est la loi de $Y_{n+p} - Y_n$*.*
c) En déduire que Y_n *ne converge pas en probabilité donc pas non plus presque sûrement.*

Exercice 8 *Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par* $f(t) = \cos t$ *si* $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *et* $f(t) = 0$ *sinon. En déduire sans calcul les intégrales suivantes:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^2}dx \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{1-x^2}dx \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{(1-x^2)^2}dx.$$