1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur
TD 5

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire on pose pour $t \in R$, $h(t) = E(\exp iX)$. Montrer que h est définie sur R. On suppose que X^k est intégrable. Montrer que h est k fois dérivable en 0. Calculer $h^{(k)}(0)$.
Application: Calculer les moments de la loi normale centrée réduite.

Exercice 2 : Soient X une variable aléatoire qui suit la loi de cauchy $C(a)$, de densité $\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, et Y de loi $C(b)$. Trouver à l'aide des fonctions caractéristiques la loi de la somme $X+Y$.

Exercice 3 : Soient X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$, et Y de loi $\mathcal{N}(m', \sigma'^2$. Trouver à l'aide des fonctions caractéristiques la loi de la somme $X+Y$.

Exercice 4 : Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Trouver la loi de la somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Exercice 5 : Soit (X_n) une suite de variables indépendantes de lois

$$P(X_n = \sqrt{n}) = P(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

1) Calculer $\phi_{X_n}(t) = E[\exp(itX_n)]$ puis ϕ_{S_n} où $S_n = \frac{X_1+...+X_n}{n}$.
2)Montrer: $\lim_{n\to\infty} \phi_{S_n} = \phi$ et identifier P_X telle que $\phi_{P_X} = \phi$.

Exercice 6 : Soient (X_n) une suite orthonormée de L^2 et $S_n = \frac{X_1+...+X_n}{n}$.
a) Calculer $\|S_n\|_2^2$.
b) En déduire que $P(|S_n| \geq t) \leq \frac{1}{nt^2}, \quad t > 0$.
c) Soit $\alpha > 1$ et $\phi(n) = [n^\alpha]$. Montrer que $S_{\phi(n)}$ converge p.s vers 0.

Exercice 7 : Soit $\phi = \phi_X$ une fonction caractéristique; montrer l'équivalence:
a) $\phi(x_0) = 1$ pour $x_0 \in R^+$
b) $\phi(x + x_0) = \phi(x), \quad \forall x \in R$
c) X est à valeurs dans les multiples de $\frac{2\pi}{x_0}$.

Exercice 8 : a) Calculer les fonctions caractéristiques des densités

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi \mathrm{ch}\, x} \quad f_2(x) = \frac{1}{2\mathrm{ch}^2\, x}.$$

b) Soit (X_n) une suite de variables i.i.d de densité f_1; calculer la fonction caractéristique de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et sa limite quand n tend vers l'infini. Conclusion.

Exercice 9 : Soit $(G_k)_{k\in Z}$ une suite de variables indépendantes, de même loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. Soit (c_i) une suite de réels tels que

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = 1.$$

On pose

$$X_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} c_i G_{m-i}, \quad n \geq 0, \quad m \in Z.$$

a) Montrer que, lorsque $n \to \infty$, $X_{m,n}$ converge vers une variable X_m, dans L^2.
b) Montrer que X_m, est de loi gaussienne et calculer son espérance et sa variance.
c) Montrer que le coefficient de corrélation entre X_n et $X_{n'}$ ne dépend que de $|n - n'|$.

Exercice 10 : a) Soit (X_n) une suite de variables bornées, $|X_n| \leq C$. Montrer que X_n tend vers 0 en probabilité si et seulement si $\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$.
b) Soit (X_n) une suite de variables telle que X_n tend vers C en probabilité. Soit f une application réelle mesurable bornée et continue au point C. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = f(C).$$