1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur
TD 1
Lois de probabilité discrètes

1 modèle probabiliste et probabilité conditionnelle

Exercice 1. Un joueur de poker reçoit une main de cinq cartes d'un jeu de trente deux cartes. Construire un espace de probabilité correspondant à cette expérience aléatoire. Quelles sont les probabilités que sa main contienne :

- Une seule paire.
- Deux paires.
- Un brelan.
- Un carré.
- Un full.

Exercice 2. Une urne contient quatre boules blanches et cinq boules noires. on tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. Trouver la probabilité pour que l'on obtienne deux blanches. trouver la probabilité pour que la premier tirage donne une blanche sachant que la deuxième est une noire.

Exercice 3. Mon voisin a 2 enfants.

- Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille?
- L'un d'eux est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille?

Exercice 4. On a décelé dans un élevage de moutons une probabilité 0,3 pour qu'un animal soit atteint d'une maladie M. La probabilité qu'un mouton sain ait une réaction négative à un test T est 0,9. La probabilité qu'un mouton malade ait une réaction positive est 0,8. Quelle est la probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive, soit atteint par M.

2 Lois de probabilité usuelles

2.1 Loi de Bernoulli

On fait une expérience pour laquelle il n'y a que 2 issues possibles notées: oui, non. On pose:

$$X_1(\text{oui}) = 1, \quad , \ \mathrm{X}_1(\text{non}) = 0.$$

On suppose que la probabilité d'observer oui est p. Donner la loi de X_1 (loi de Bernoulli de paramètre p). Calculer son espérance et sa variance.

2.2 Loi binomiale

On répète n fois, de façon indépendante l'expérience de l'exercice précédent. On note X_k , $1 \leq k \leq n$, le résultat observé lors de la $\mathrm{k}^{\mathrm{eme}}$ expérience et l'on pose:

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Montrer que:

$$P(Y = l) = C_n^l \, p^l \, (1-p)^{n-l} \ , \ \ 1 \leq l \leq n.$$

(Loi binomiale B(n,p)) Calculer l'espérance et la variance de Y.

2.3 Loi uniforme

Soit un dé équilibré à n faces.
1) On lance le dé une fois et l'on pose: X_1=score observé. Calculer la loi de X_1 (loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$). Calculer $E(X_1)$ et var X_1.

2) On lance 2 fois le dé. On note respectivement X_1, X_2 les scores observés au premier et second lancé. Calculer la probabilité des événements suivants:
  a) L'un des scores au moins est plus grand que 4.
  b) Les deux scores sont tous les 2 plus petits que 3.

3) On pose $Y = X_1 + X_2$. Calculer la loi de Y ainsi que $E(Y)$ et var Y.

2.4 Loi géométrique

On répète l'expérience de l'exercice 1, de façon indépendante, jusqu'au moment (aléatoire) où l'on observe oui. On pose: Y= nombre d'expériences effectuées.
1) Montrer que $\forall n \in N, P(Y = n) = p(1-p)^{n-1}$.
2) Vérifier que $\sum_{n \in N} P(y = n) = 1$.
3) Calculer $E(Y)$ et var Y.

2.5 Loi hypergéométrique

On tire au hasard n objets parmi N dont N_1 sont de type T_1, et $N - N_1$ sont de type T_2. Soit Y le nombre d'objets de type T_1. Montrer que:

$$P(Y = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}.$$

2.6 Loi de Poisson

Soit $\Omega = \{e_k\}_{k \in N}$ un ensemble dénombrable. On le munit de la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$): $P(e_k) = C\frac{\lambda^k}{k!}$. 1) Calculer C.

2) On suppose que $\Omega = N$, on pose pour $\omega \in \Omega, X(\omega) = \omega$. Calculer $E(X)$ et var X.

3) Soit Y une autre variable aléatoire de même loi que X, indépendante de X. Calculer la loi de $Z = X + Y$.
4) Calculer la loi de X sachant que Z=k.

2.7 convergence de la loi Binomiale vers la loi de poisson

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes qui prend ses valeurs dans $\mathcal{X}$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X_n converge en loi vers X si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{X} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x).$$

La convergence en loi est notée $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de loi $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que np_n converge vers une constante strictement positive m. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une loi de poisson de paramètre m.

2.8 Application de la loi Binomiale

La probabilité qu'une famille est n enfants est $p^{n-1}(1-p)$. On suppose que la répartition des sexes est équiprobable. Montrer que la probabilité qu'une famille ait exactement k garçons est:

$$\frac{2p^{k-1}(1-p)}{(2-p)^{k+1}}.$$

3 Fonction génératrice

On rappelle qu'une série entière réelle de variable x est une série de terme général $U_n(x) = a_n x^n \quad a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. On démontre que si la série est convergente en $x \neq 0$, alors elle converge en tout point d'un intervalle maximal $]-R, R[,\ R > 0$ (la convergence aux bornes fait l'objet d'une étude spécifique). On peut, pour $|x| < R$, dériver ou intégrer terme à terme une série entière, la somme étant égale à la dérivée de la somme, la somme des intégrales étant égale à l'intégrale de la somme.

3.1 définition et propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète. On considère la série de terme général $s^n \mathbb{P}(X = n)$ et on note par $g_X(s)$ la somme de la série

$$g_X(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s^n \mathbb{P}(X = n)$$

Montrer que :

- Le rayon de convergence est supérieure ou égal à 1.
- La fonction g_X caractérise la loi $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X.
- L'espérance de X est finie si et seulement si $\lim_{s \to 1} g'_X(s) < \infty$ et que

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{s \to 1} g'_X(s)$$

- De même X possède un moment d'ordre k si et seulement si $\lim_{s \to 1} g_X^{(k)}(s) < \infty$ et que

$$\mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1)) = \lim_{s \to 1} g_X^{(k)}(s)$$

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes alors $g_{X+Y} = g_X g_Y$.

Exercice 5.
1/ Soit X une variable aléatoire à valeurs entière qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, calculer la fonction génératrice de X.
2/ Montrer que si X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ et si X et Y sont indépendants, alors $X+Y$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda + \mu$.