Master : Economie et Finance Internationales, spécialité : Ingénieries Financières et Modélisation (IFIM), Université Paris13.
Processus stochastiques à temps discret (2012-2013)

Feuille d'exercices 8

Exercice 1 *Entre une date $t = 0$ et $t = N$, on a échangé sur un marché financier $d \geq 1$ titres, dont les prix à la date $n \in \{0, \cdots, N\}$ sont notés $S_n^1, \cdots, S_n^d$. Ceci représente les actifs à risque, auquel on rajoute un actif sans risque de prix $(S_n^0)_{0 \leq n \leq N}$. On note $S_n = (S_n^0, S_n^1, \cdots, S_n^d)$, $n \in \{0, \cdots, N\}$. On appelle stratégie de gestion de portefeuille, tout processus $\phi = (\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$ prévisible pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \cdots, S_n)$. Pour un portefeuille géré par la stratégie ϕ, $\phi_n = (H_n^0, H_n^1, \cdots, H_n^d)$ avec H_n^i est la quantité d'actif (i) à la date n.*

1. *Quelle est la valeur du portefeuille $V_n(\phi)$ à l'instant n détenu par l'agent dont la stratégie est ϕ?*

2. *Rappeler la définition d'une stratégie de gestion de portefeuille ϕ autofinancée. Montrer que si le prix actualis est une martingale et que la stratégie autofinancée est bornée alors le processus des valeurs du portefeuille actualis $(\tilde{V}_n(\phi))_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale.*

3. *Montrer que pour une stratégie autofinancée*

$$\sum_{k=0}^{d} H_{n+1}^k S_n^k = \sum_{k=0}^{d} H_n^k S_n^k.$$

Quelle est la signification financière d'un tel résultat?

Exercice 2 *Soient $\Omega = \{0,1\}^N$, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Pour tout $1 \leq i \leq N$, on définit la variable aléatoire ε_i par*

$$\varepsilon_i(\omega) = \omega_i,$$

où $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$. Soit $0 < a < b$, on pose $S_n^0 = (1+r)^n$, $S_0 = s_0$ et

$$S_n = s_0 \prod_{i=1}^{n} (1 + a + (b-a)\varepsilon_i), \quad 1 \leq n \leq N$$

où s_0 est un nombre positif donné.

S_n^0 est le prix de référence de l'actif sans risque dans un marché financier, S_n est le prix d'un actif risqué et N est l'échéance d'un call européen sur l'actif risqué. La filtration de l'information est simplement la filtration canonique du processus $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Soit $r \in]a, b[$, on pose $p = (b-r)/(b-a)$ et on suppose que les variables aléatoires $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N)$ sont indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $1-p$. On a pour tout $1 \leq i \leq N$, $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 0) = p$ et $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = 1-p$.

1. *Vérifier qu'il s'agit du modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Montrer que le marché est viable et complet.*

2. *On note* c_n *la valeur, à l'instant* n*, d'un call européen sur l'actif risqué au prix d'exercice* K*. Montrer que* c_n *peut s'écrire sous la forme:* $c_n = \varphi(n, S_n)$*, où* φ *est une fonction que l'on explicitera à l'aide de* K, a, b *et* r*. On rappelle que* $\mathcal{F}_0$ *est la tribu triviale,* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *et que* $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n) = \sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$*,* $1 \leq n \leq N$*.*