

**Master : Economie et Finance Internationales, spécialité : Ingénieries
Financières et Modélisation (IFIM), Université Paris13.
Processus stochastiques à temps discret (2012-2013)**

Feuille d'exercices 7

Exercice 1 Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - q$. On définit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

1. Soit $T = T_{a,b} = \inf\{n \geq 0, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Montrer que T est un temps d'arrêt.
2. On suppose que $p = q = \frac{1}{2}$, déduire de $\mathbb{E}(S_T)$ la probabilité de l'événement $(S_T = -a)$.
3. Montrer que $Z_n = S_n^2 - n$ est une martingale, déduire de $\mathbb{E}(Z_T)$ la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et intégrables. On pose $\mathbb{E}(X_k) = m_k$, $S_0 = \tilde{S}_0 = 1$, $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n X_k$, $\tilde{S}_n = 1 + \sum_{k=1}^n \prod_{p=1}^k X_p$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ pour $n \geq 1$, \mathcal{F}_0 la tribu triviale.

1. Vérifier que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des \mathcal{F}_n sous martingales.
2. Démontrer que pour tout n et tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}[\sup_{p \leq n} S_p > a] \leq \frac{1 + \sum_{k=1}^n m_k}{a}$$

$$\mathbb{P}[\sup_{p \leq n} \tilde{S}_p > a] \leq \frac{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{p=1}^k m_p}{a}$$

3. On suppose que X_k suit la loi exponentielle de paramètre λ_k pour tout k . Calculer la transformée de Laplace $\mathbb{E}(\exp(-tX_k))$ de X_k .
4. Pour tout réel positif α on pose $Z_k = \frac{\alpha + \lambda_k}{\lambda_k} \exp(-\alpha X_k)$, $k \geq 1$. Montrer que $M_n = \prod_{k=1}^n Z_k$, $n \geq 1$, définit une \mathcal{F}_n -martingale.
5. Montrer que $(M_n)_{n \geq 1}$ converge p.s.