Master : Economie et Finance Internationales, spécialité : Ingénieries Financières et Modélisation (IFIM), Université Paris13.
Processus stochastiques à temps discret (2012-2013)

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 *Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Soit Y une autre variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre μ. On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.*

1. *Calculer la loi de $Z = X + Y$.*
2. *Calculer la loi de $\mathcal{L}(X|Z)$.*
3. *Donner $\mathbb{E}(X|Z)$ et $\mathbb{E}(X^2|Z)$.*

Exercice 2 *Soit $\rho \in]-1, 1[$. On considère un couple gaussien de variables aléatoires (X, Y) de densité :*

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 - 2\rho xy + y^2\right)\right).$$

1. *On note par f_Y la densité de Y, montrer que $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$.*
2. *Montrer que la loi conditionnelle de X sachant Y est une loi gaussienne $\mathcal{N}\left(\rho Y, 1-\rho^2\right)$.*
3. *Montrer que*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx = \rho y.$$
En déduire $\mathbb{E}(X|Y)$.
4. *Montrer que*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx = 1 - \rho^2 + \rho^2 y^2.$$
En déduire $\mathbb{E}(X^2|Y)$.
5. *Vérifier que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$ et que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2|Y)) = \mathbb{E}(X^2)$.*

On rappelle que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1, \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$